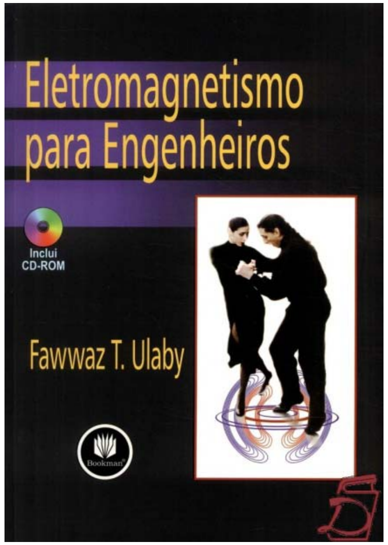
ENGC34 – Eletromagnetismo Aplicado

ÁREA EFETIVA E FÓRMULA DE FRIIS

♦ http://www.eecis.udel.edu/~mirotzni/ELEG413/ELEG413_11.htm



Prof. Dr. Vitaly F. Rodríguez-Esquerre

Introdução

A relação entre a potência recebida por uma antena e a densidade média de potência disponível no ponto onde está situada a antena, tem dimensão de área. Isto é:

$$A_e = \frac{P_{\text{int}}}{S_{ave}} \qquad (1)$$

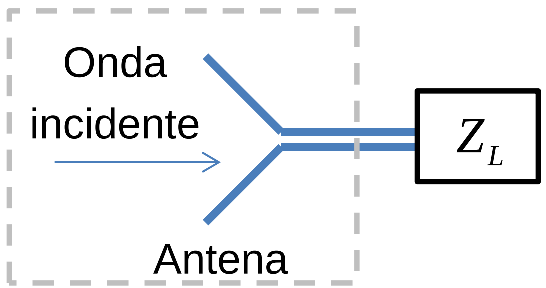
onde:

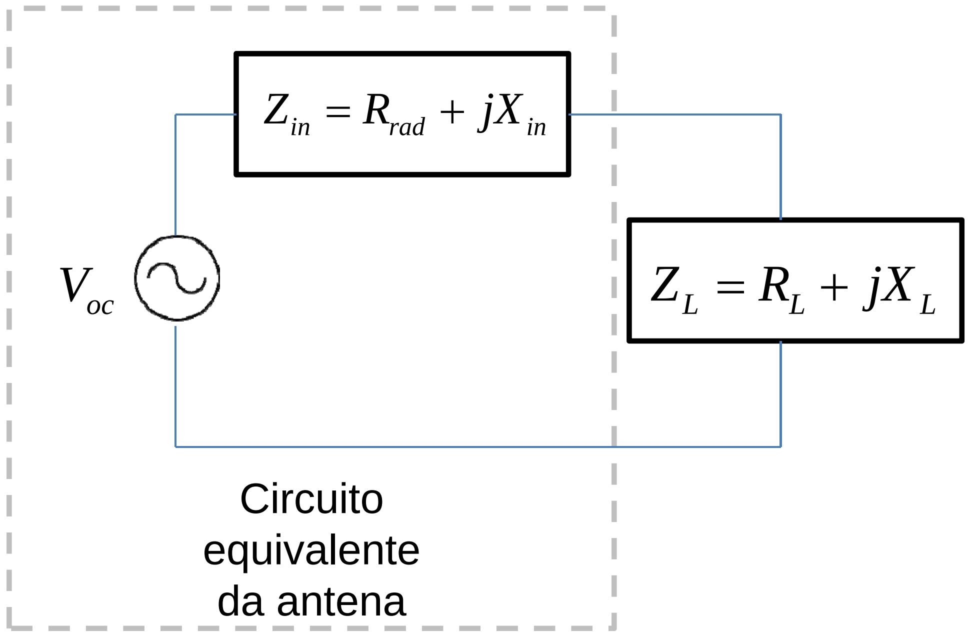
P_r é a potência recebida, S_{ave} a densidade média de potência e A_e é a área efetiva.

$$P_{\text{int}} = S_{ave} A_e \qquad (2)$$

Modelo circuital de uma antena receptora

Pode-se modelar uma antena receptora, cuja impedância de entrada é $Z_{in} = R_{in} + j\,X_{in}$ e impedância da carga $Z_L = R_L + j\,X_L$, como mostrado.





Modelo circuital de uma antena receptora

A corrente de entrada pode ser determinada como:

$$I_{in} = \frac{V_{oc}}{Z_{in} + Z_L} \qquad (3)$$

Quando há casamento de impedâncias, isto é, $Z_L = Z_{in}^*$, ou seja $Z_L = R_{in} - j\,X_{in}$, a potência transferida para a carga é máxima e é dada por:

$$P_{\mathrm{int}} = \frac{1}{2}\left|I_{in}\right|^2 R_L \qquad (4)$$

Modelo circuital de uma antena receptora

Desprezando as perdas ôhmicas e fazendo $R_{in} = R_{rad} = R_L$,

tem-se que:

$$\mathrm{I}_{\mathrm{in}} = \frac{\mathrm{V}}{2\mathrm{R}_{\mathrm{in}}}$$

assim:

$$P_{\mathrm{int}} = \frac{1}{2}\left|I_{in}\right|^2 R_L = \frac{1}{2}\frac{\left|V\right|^2}{(2R_{in})^2} R_{rad} = \frac{1}{2}\frac{\left|V\right|^2}{4R^2{}_{rad}} R_{rad} = \frac{\left|V\right|^2}{8R_{rad}}$$

Modelo circuital de uma antena receptora

$$P_{\text{int}} = \frac{|V|^2}{8R_{rad}}$$

Dividindo ambos membros pela densidade média de potência disponível, tem-se:

$$\frac{P_{\text{int}}}{S_{av}} = \frac{1}{8}\frac{|V|^2}{R_{rad}S_{av}} = A_e$$

Modelo circuital de uma antena receptora

A tensão induzida na antena depende das dimensões da antena e da distribuição do campo elétrico ao longo da antena.

Para uma antena dipolo infinitesimal, pode-se considerar que o campo elétrico é constante ao longo da antena

$$V = E\ l$$

onde o valor do campo elétrico é dado por:

$$S_{av} = \frac{E^2}{2\eta}$$

Área efetiva

Para o dipolo curto, cuja resistência de radiação é dada por:

$$R_{RAD} = \left(80\pi^2 \frac{l^2}{\lambda^2} \right)$$

A área efetiva será dada por:

$$A_e = \frac{1}{8} \frac{|V|^2}{R_{rad} S_{av}} = \frac{E^2 l^2}{8 \left(80\pi^2 \frac{l^2}{\lambda^2} \right) \frac{E^2}{2 \times 120\pi}} = \frac{3}{8\pi} \lambda^2$$

A diretividade de um dipolo Hertziano é igual a:

$$D = 1{,}5 = \frac{3}{2}$$

Área efetiva

Que pode ser re-escrita na forma:

$$D = 1,5 = \frac{3}{2} = \frac{4\pi}{\lambda^2}\left(\frac{3\lambda^2}{8\pi}\right) = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_e$$

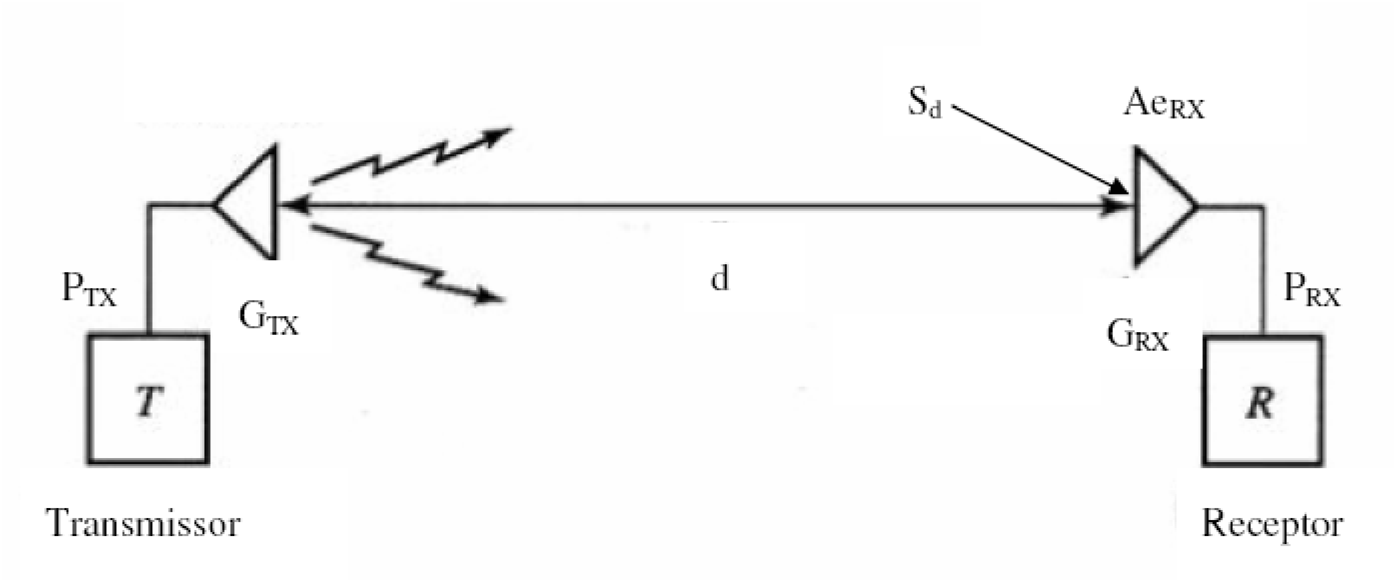
Assim:

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_e$$

Embora essa relação tenha sido obtida para o dipolo ideal, ela é válida para qualquer antena !

Fórmula de Friis

Em um enlace de comunicação a través do espaço livre, pode-se calcular a potência recebida pela fórmula de Friis.



Fórmula de Friis

Para uma antena isotrópica, a densidade média de potência a uma distância r pode ser obtida usando a expressão:

$$S_{iso} = \frac{P_T}{4\pi r^2}$$

onde P_T é a potência de transmissão.

Se a antena for não isotrópica, então apresenta um ganho G_T e a fórmula anterior se transforma em:

$$S_{ave} = G_T S_{iso} = \frac{P_T}{4\pi r^2} G_T = \frac{P_T}{4\pi r^2} \xi_T D_T$$

Fórmula de Friis

A potência interceptada pode ser calculada usando a expressão:

$$P_{\text{int}} = S_{ave}\, A_{er}$$

Logo:

$$P_{\text{int}} = \frac{P_T}{4\pi r^2}\, \xi_T D_T A_{er}$$

Onde: A_{er} é a área ou *abertura efetiva* da antena receptora, S_{ave} *é a densidade média de potencia disponível no ponto onde se encontra a antena receptora.*

Fórmula de Friis

A potência recebida pode ser calculada usando a expressão:

$$P_{rec} = P_{\text{int}}\, \xi_r$$

A área efetiva da antena receptora, é dada por:

$$A_{er} = \frac{\lambda^2}{4\pi} D_R$$

Substituíndo na equação anterior, obtem-se:

$$P_{rec} = \xi_r P_{\text{int}} = \xi_r \frac{P_T}{4\pi r^2} \xi_T D_T \frac{\lambda^2}{4\pi} D_R = \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2 \xi_T \xi_r D_T D_R P_T$$

Fórmula de Friis

Finalmente:

$$P_{\mathrm{Re}c} = \left(P_T G_T\right) G_R \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2$$

Se as antenas não estão alinhadas:

$$P_{\mathrm{Re}c} = \left(P_T G_T\right) G_R \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2 F_T\left(\theta,\phi\right) F_R\left(\theta,\phi\right)$$

Perda de espaço livre

Na formula de Friss, o termo:

$$L_{fs} = \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2$$

representa a *perda de espaço livre, em dB*:

$$L_{fs}(dB) = -10\log\left(L_{fs}\right) = 20\log(4\pi) + 20\log\, r \,-\, 20\log\lambda$$

Em VHF, a expressão anterior toma a seguinte forma.

$$L_{fs} = 32{,}4 + 20\log\, r_{(Km)} + 20\log\, f_{(MHz)}$$

Perda de espaço livre

Na faixa de UHF e frequências mais elevadas é conveniente expressar a formula de perda por espaço livre da seguinte maneira:

$$L_{fs} = 92{,}4 + 20\log r_{(Km)} + 20\log f_{(GHz)}$$

Fórmula de Friis

Para fins práticos essa fórmula pode ser expressa em dB:

$$W_{R(dBm)} = W_{T(dBm)} + G_{T(dBi)} + G_{R(dBi)} - 20\log r_{(Km)} - 20\log f_{(Mhz)} - 32{,}44$$

Onde:

G_T (dBi) = 10log(G_T)
G_R (dBi) = 10log(G_R)
W_T (dBm) = 10log(W_T em Watts/ 10-3) = W_T (dB) + 30
W_R (dBm) = 10log(W_R em Watts/10-3) = W_R(dB) + 30

Exemplo

1 uW é entregue a uma antena com eficiência de 98% e largura de média potência de 4 graus (elevação e azimutal) na frequência de 100 MHz.

Determine a potência recebida por uma antena dipolo de cobre de 10 cm com raio de 2 mm.

Exemplo

Duas antenas dipolo de ferro com raio de 0,8 mm e comprimento de 10 cm operam na freqüência de 300 MHz e estão afastadas 200 m (perfeitamente alinhadas). Considere casamento perfeito. Determine:

- a) Potência entregue pelo transmissor se a potência no receptor é 0,3 uW.
- b) Densidade de Potência a 100 m e $\theta = 45^{o}$

Exemplo

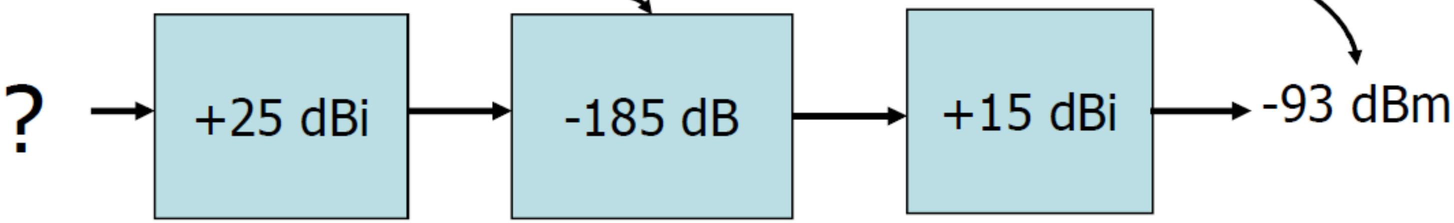
- A ground-based communication system transmits to a geosynchronous satellite located 41935 km from the transmitter at a frequency of 1 GHz The gain of the ground-based antenna is 25 dBi, and the satellite antenna has a gain of 15 dBi.
- Assuming free-space propagation path loss, what must be the transmitter power in Watts to produce 5 μVRMS at the output of the satellite antenna? Assume that the satellite antenna is matched to 50Ω.

Solução

$$P_{RECEIVED} = \frac{V^2}{R} = \frac{\left(5\times10^{-6}\right)^2}{50} = 5\times10^{-13}$$

$$\Rightarrow P_{dBm} = 10\log\frac{5\times10^{-13}}{0.001} = -93dBm$$

$$= -32.44 - 20\log(1000) - 20\log(41935) = -185$$



$$-93 = ? + 25 - 185 + 15 \Rightarrow ? = 52\ dBm \text{ or } 158.5 \text{ Watts}$$

Exemplo

- Considere a potência de um transmissor de 50 W, expresse essa potência em: (a) dBm (b) dbW.
- Considerando que a antena transmissora é isotrópica e a freqüência da portadora é de 900 MHz, determine, em dBm, a potência recebida por uma antena isotrópica a 100 m da antena. Qual a potência recebida a 100 km?

Solução

- a)A potência em dBm é definida pela relação:

$$P_{dBm} = 10\log(\frac{P}{10^{-3}\ W}) = 10\log(\frac{50}{10^{-3}}) = 47\ dBm$$

- b)A potência em dBW é definida pela relação:

$$P_{dBW} = 10\log(\frac{P}{1\,W}) = 10\log(\frac{50}{1}) = 17\ dBW$$

Solução

$$P_R(100m) = P_T\left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right)^2 \frac{G_T G_R}{L} = \frac{50.1.1.(1/3)^2}{(4\pi)^2(100)^2.1} = 3{,}5.10^{-6}\,W$$

$$P_R(dBm) = 10\log(\frac{P_R}{10^{-3}}) = 10\log(\frac{3{,}5.10^{-6}}{10^{-3}}) = -24{,}5\,dBm$$

- Para o caso de d=10 km, tem-se que:

$$P_R(10000m) = P_T\left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right)^2 \frac{G_T G_R}{L} = \frac{50.1.1.(1/3)^2}{(4\pi)^2(10^4)^2.1} = 3{,}5.10^{-10}\,W$$

$$P_R(dBm) = 10\log(\frac{P_R}{10^{-3}}) = 10\log(\frac{3{,}5.10^{-10}}{10^{-3}}) = -24{,}5 - 40 = -64{,}5\,dBm$$

Exemplo

♦ *A typical analog cell phone antenna has a directivity of 3 dBi at its operating frequency of 800.0 MHz. The cell tower is 1 mile away and has an antenna with a directivity of 6 dBi. Assuming that the power at the input terminals of the transmitting antenna is 0.6 W, and the antennas are aligned for maximum radiation between them and the polarizations are matched, find the power delivered to the receiver. Assume the two antennas are well matched with a negligible amount of loss.*

$$\frac{P_r}{P_t} = \underbrace{e_{cdt}}_{=1}\underbrace{e_{cdr}}_{=1}(1-\underbrace{|\Gamma_r|^2}_{=0})(1-\underbrace{|\Gamma_t|^2}_{=0})\left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2 D_t^{\max} D_r^{\max} \underbrace{|\hat{\rho}_w \cdot \hat{\rho}_a^*|^2}_{=1}$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3e8}{800e6} = 0.375m$$

$$D_t^{\max} = 10^{3/10} = 2.0$$

$$D_r^{\max} = 10^{6/10} = 4.0$$

$$\Rightarrow \quad P_r = 0.6\ watts \cdot \left(\frac{0.375}{4\pi \cdot 1609.344}\right)^2 \cdot 2 \cdot 4 = 1.65\, nW$$

Exemplo

♦ *A half wavelength dipole antenna (max gain = 2.14 dBi) is used to communicate from an old satellite phone to a low orbiting Iridium communication satellite in the L band (~ 1.6 GHz). Assume the communication satellite has antenna that has a maximum directivity of 24 dBi and is orbiting at a distance of 781 km above the earth. Assuming that the power at the input terminals of the transmitting antenna is 1.0 W, and the antennas are aligned for maximum radiation between them and the polarizations are matched, find the power delivered to the receiver. Assume the two antennas are well matched with a negligible amount of loss.*

$$\frac{P_r}{P_t} = e_{cdt} e_{cdr} (1-|\Gamma_r|^2)(1-|\Gamma_t|^2)\left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2 D_t^{\max} D_r^{\max} |\hat{\rho}_w \cdot \hat{\rho}_a^*|^2$$

♦ = 1 ♦ = 1 ♦ = 0 ♦ = 0 ♦ = 1

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3e8}{800e6} = 0.1875m$$

$$D_t^{\max} = 10^{2.14/10} = 1.64$$

$$D_r^{\max} = 10^{24/10} = 251.0$$

$$P_r = 1.0\ watts \cdot \left(\frac{0.1875}{4\pi \cdot 781{,}000}\right)^2 \cdot 1.64 \cdot 251 = 0.15\ pW$$

Exemplo

- *A roof-top dish antenna (max gain = 40.0 dBi) is used to communicate from an old satellite phone to a low orbiting Iridium communication satellite in the Ku band (~ 12 GHz). Assume the communication satellite has antenna that has a maximum directivity of 30 dBi and is orbiting at a distance of 36,000 km above the earth. How much transmitter power is required to receive 100 pW of power at your home. Assume the antennas are aligned for maximum radiation between them and the polarizations are matched, find the power delivered to the receiver. Assume the two antennas are well matched with a negligible amount of loss.*

$$\frac{P_r}{P_t} = \underbrace{e_{cdt}}_{=1}\underbrace{e_{cdr}}_{=1}(1-\underbrace{|\Gamma_r|^2}_{=0})(1-\underbrace{|\Gamma_t|^2}_{=0})\left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2 D_t^{\max} D_r^{\max} \underbrace{|\hat{\rho}_w \cdot \hat{\rho}_a^*|^2}_{=1}$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3e8}{800e6} = 0.025m$$

$$D_r^{\max} = 10^{40/10} = 10{,}000$$

$$D_t^{\max} = 10^{30/10} = 1000.0$$

$$\Rightarrow$$

$$P_t = \frac{100 \cdot 10^{-12}\ watts}{\left(\frac{0.025}{4\pi \cdot 36{,}000{,}000}\right)^2 \cdot 10{,}000 \cdot 1000} = 82\ W$$